Comparaison de séries et d'intégrales

9 octobre 2018

1

Soient a un nombre positif, et f, g deux fonctions numériques continues strictement positives.

1.1

Enoncer et démontrer le théorème de comparaison des intégrales $\int_a^x f$ et $\int_a^x g$ lorsque $\int_a^{+\infty} g$ diverge et que le quotient $\frac{f}{g}$ a pour limite 1 à l'infini.
Enoncer sans démonstration le théorème analogue lorsque $\int_a^{+\infty} g$ converge.

1.2

On suppose de plus que f est continûment dérivable et qu'en outre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbf{R}.$$

a) Montrer que $\lim \frac{\log f(x)}{\log x} = \alpha$. On distinguera les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.

b) On suppose $\alpha < -1$. Soit $\varepsilon > 0$.
i) Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $f(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$.
ii) Etablir la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.
iii) Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim -\frac{xf(x)}{\alpha+1}$$

On pourra intégrer par parties le membre de gauche (et avoir de la suite dans les idées).

c) On suppose $\alpha > -1$; établir la divergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ et l'équivalence à l'infini des fonctions $x \to \int_a^x f$ et $x \to \frac{xf(x)}{\alpha+1}$.

d) Montrer par des exemples que, dans le cas où $\alpha = -1$ l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ peut converger ou diverger selon le choix de f.

1.3

Donner l'exemple d'une fonction numérique ϕ définie, strictement positive, continûment dérivable sur $[0,+\infty[$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\phi(x)}{\log x}=0,\ \int_0^{+\infty}\phi=+\infty$$

sans que les fonctions $\int_a^x\phi$ et $x\phi(x)$ soient équivalentes à l'infini. (On observera qu'une fonction ≥ 1 peut osciller).

2

Dans toute cette partie, $U=\sum u_n$ est une série divergente à termes strictement positifs ; s_n désigne la somme de rang n de U et l'on convient que $s_{-1}=0$. En outre f est une fonction numérique définie, continue, décroissante et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note V et V' les séries de termes généraux $u_nf(s_n)$ et $u_nf(s_{n-1})$.

Préliminaire. Comparer la nature de $\int_0^{+\infty}f$ et celle de la série de terme général $w_n=\int_{s_{n-1}}^{s_n}f$.

2.1

a) On suppose que $\int_0^{+\infty}f$ converge. Montrer que V converge.
b) On suppose que $\int_0^{+\infty}f$ diverge. Monter que V' diverge.

2.2

Dans cette question, on suppose que u_n est bornée, mettons par M.

a) Encadrer $u_nf(s_n)-u_nf(s_{n-1})$ à l'aide de $f(s_n)-f(s_{n-1})$. Comparer les natures de l'intégrale $\int_0^{+\infty}f$, de la série V et de la série V'.

b) On suppose que $\int_0^{+\infty}f$ diverge. Montrer que les sommes partielles de V et celles de V' sont équivalentes.

c) On suppose de plus que f est continûment dérivable et qu'en outre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\alpha\in\mathbf{R}$$

avec $\alpha<-1$. Donner un équivalent de $\int_{s_n}^{+\infty}f(t)dt$ en fonction de f puis des restes de V et de V'.

d) Que dire du cas où $f(x)=e^{-x}$?

2.3

Dans cette question, on suppose que la fonction $x \longrightarrow \frac{\log f(x)}{\log x}$ est croissante au voisinage de l'infini et que la suite $\frac{s_{n+1}}{s_n}$, est bornée, la suite u_n étant bornée où non.

a) Quel est le signe de $\log f(x)$ au voisinage de $+\infty$? Etablir, pour tout couple (x, y) de nombres réels assez grands, l'inégalité après

$$\log f(x) - \log f(y) \leq \frac{\log f(x)}{\log x}(\log x - \log y).$$

b) Montrer que les séries V et V' sont de même nature. ~~[illegible]~~-mini

c) Si de plus $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(s_n)}{f(s_{n-1})} = 1$ et trouver, à l'aide d'intégrales portant sur f, un équivalent de la somme de rang n de V_n lorsque la série V diverge et un équivalent du reste de rang n lorsque la série V converge.

d) On suppose toujours que $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$; trouver, lorsque n tend vers $+\infty$, de équivalents pour les suites $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^\alpha$ si $\alpha < -1$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k s_k^\alpha$ si $\alpha \in]0, -1[$

2.4

Dans cette question, on ne conserve que les seules hypothèses : f est décroissante continue strictement positive, U est une série divergente à termes strictement positifs.

a) Montrer que l'on peut toujours choisir U de sorte que la série V' diverge. Donner un exemple d'un tel choix lorsque f est la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$. La série converge-t-elle dans ce cas ?

b) Montrer que, si la série V converge, la suite $s_n f(s_n)$ tend vers 0. Montrer en sens inverse que, si $x f(x)$ tend vers 0 à l'infini, on peut choisir U de façon que la série V converge.

c) Donner un exemple d'un couple d'une série U et d'une fonction f tel que V converge et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

I

1° Démontrons d'abord le résultat suivant :

Lemme. — *Soit* f_1 (resp. g) *une application localement intégrable de* $[a, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ (resp. *dans* $\mathbb{R}_+$). *On suppose que* $f_1 = o(g)$ *au voisinage de* $+\infty$.

a) Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ *est également convergente et on a*

$$\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

b) Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge, on a*

$$\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\text{(1)} \qquad \exists A \in [a, +\infty[, \quad \forall t \geqslant A, \quad |f_1(t)| \leqslant \varepsilon g(t).$$

Cette inégalité montre que l'intégrale de f_1 est absolument convergente, donc convergente sur $[A, +\infty[$. De plus,

$$\forall x \geqslant A, \quad \forall y \geqslant x, \quad \left|\int_x^y f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y |f_1(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \geqslant A, \quad \left|\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui prouve bien que $\int_x^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

b) En partant de (1), on obtient

$$\forall x \geqslant A, \quad \left|\int_A^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^x |f_1(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, g étant positive ou nulle, la fonction $x \to \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ avec x. Par suite

$$\exists A' \geqslant A, \quad \forall x \geqslant A', \quad \left|\int_a^A f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$\forall x \geqslant A', \quad \left|\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad (\text{car } g \geqslant 0).$$

On a ainsi prouvé $\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

L'application de ces résultats est immédiate; si g et h sont des applications à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} h \underset{+\infty}{\sim} g \\ \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} h - g = o(g) \\ \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_a^{+\infty} (h-g)(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ \int_x^{+\infty} (h-g)(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_a^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ \int_x^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} h \underset{+\infty}{\sim} g \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h - g = o(g) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \int_a^x (h-g)(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\Rightarrow \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2° *a*) Si $\alpha \neq 0$, l'hypothèse s'écrit $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{\alpha}{x}$. Comme $\dfrac{\alpha}{x}$ est de signe constant et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge il résulte du **1°** que

$$\mathrm{Log}\,\frac{f(x)}{f(a')} = \int_{a'}^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t \sim \alpha \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \alpha\,(\mathrm{Log}\,x - \mathrm{Log}\,a')$$

où $a' = \sup(a, 1)$. On en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}\,f(x)}{\mathrm{Log}\,x} = \alpha$.

Si $\alpha = 0$, l'hypothèse s'écrit $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On déduit du lemme du 1° que

$$\int_{a'}^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_{a'}^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Log}\,f(x) = o\,(\mathrm{Log}\,x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}\,f(x)}{\mathrm{Log}\,x} = 0.$$

b) Écrivons

$$\mathrm{Log}\,yf(y) = \mathrm{Log}\,y + \mathrm{Log}\,f(y) = \mathrm{Log}\,y\left(1 + \frac{\mathrm{Log}\,f(y)}{\mathrm{Log}\,y}\right).$$

Mieux : avec $\alpha + \varepsilon < -1$, $f(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$ donc $x f(x) \to 0$ et

Comme $1 + \dfrac{\mathrm{Log}\,f(y)}{\mathrm{Log}\,y}$ tend vers $\alpha + 1 < 0$ quand y tend vers $+\infty$, on voit que

$$\lim_{y \to +\infty} \underbrace{y\,\mathrm{Log}\,y}_{y f(y)} = 0$$

puis $\displaystyle\int_x^{+\infty} f = \big[t f(t)\big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} t f'(t)\,dt$

On a donc

$$\lim_{y \to +\infty} \int_x^y [f(t) + tf'(t)]\,\mathrm{d}t = \lim_{y \to +\infty} [yf(y) - xf(x)] = -\,xf(x).$$

$\displaystyle\int_x^{+\infty} t f'(t)\,dt = \alpha \int_x^{+\infty} f + o\left(\int_x^{+\infty}\right)$

Or, $\alpha + 1$ étant non nul, on a

$$f(t) + tf'(t) \underset{+\infty}{\sim} (\alpha + 1) f(t).$$

La fonction f est de signe constant, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} [f(t) + tf'(t)]\,\mathrm{d}t$ est convergente, il en est donc de même de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. De plus, d'après **1°**,

Donc $(\alpha+1)\displaystyle\int_x^{+\infty} f = -x f(x)$ AR

$$(\alpha + 1)\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} [f(t) + tf'(t)]\,\mathrm{d}t = -\,xf(x), \qquad \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} -\frac{xf(x)}{\alpha + 1}.$$

c) Le raisonnement est analogue : on voit d'abord que $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} y\,\mathrm{Log}\,y = +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} [f(t) + tf'(t)]\,\mathrm{d}t$ est donc divergente. L'équivalence

$$f(t) + tf'(t) \sim (\alpha + 1) f(t)$$

montre que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est également divergente. Par suite (d'après **1°**)

$$(\alpha + 1)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x [f(t) + tf'(t)]\,\mathrm{d}t = xf(x) - af(a) \sim xf(x),$$

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{xf(x)}{\alpha + 1}.$$

d) Premier exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$. On a $\frac{xf'(x)}{f(x)} = -1$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Deuxième exemple : $f(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log}^2 x}$ sur $[2, +\infty[$. On a

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = -\frac{\operatorname{Log} x + 2}{\operatorname{Log} x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = -1$$

alors que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \operatorname{Log}^2 t}$ est convergente :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{dt}{t \operatorname{Log}^2 t} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\operatorname{Log} x} + \frac{1}{\operatorname{Log} 2}\right) = \frac{1}{\operatorname{Log} 2}.$$

3° N.B. – L'énoncé de cette question reproduit page 51 de la Revue est incorrect. Il faut lire : *« Donner un exemple d'une fonction numérique φ définie, strictement positive et continûment dérivable sur $[a, +\infty[$, telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} \varphi(x)}{\operatorname{Log} x} = \alpha \neq -1$$

avec une intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ *divergente sans que les fonctions* $x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,dt$ *et* $x \mapsto \frac{x\varphi(x)}{\alpha + 1}$ *soient équivalentes à l'infini ».*

Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto 2 + \sin x$, φ et à valeurs strictement positives et continûment dérivable sur $[0, +\infty[$. D'autre part

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log}(2 + \sin x)}{\operatorname{Log} x} = 0$;
- $\int_0^x (2 + \sin t)\,dt = 2x - \cos x + 1$ n'a pas de limite finie quand x tend vers $+\infty$;
- $\int_0^x (2 + \sin t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} 2x$;
- $\frac{x\varphi(x)}{\alpha + 1} = x(2 + \sin x)$ n'est pas équivalent à $2x$ au voisinage de $+\infty$.

II

1° Comme f est décroissante et à valeurs strictement positives, on a

$$(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n f(s_n) \leqslant \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)\,dt \leqslant u_n f(s_{n-1}).$$

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, la série $\Sigma \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)\,dt$ converge et la série V est donc également convergente.

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, la série $\Sigma \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)\,dt$ diverge et la série V' est donc également divergente.

2° *a)* La suite (u_n) est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leqslant M.$$

On a donc

$$(3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n f(s_{n-1}) - u_n f(s_n) \leqslant M(f(s_{n-1}) - f(s_n)) = w_n.$$

La série Σw_n à termes positifs est convergente car ses sommes partielles sont majorées :

$$\sum_0^n w_k = M(f(0) - f(s_n)) \leqslant Mf(0).$$

La série $\Sigma[u_n f(s_{n-1}) - u_n f(s_n)]$ est donc convergente et les deux séries V et V′ sont de même nature. Compte tenu du 1°, on voit que V, V′ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

b) Dans le cas de la divergence, $V_n = \sum_0^n u_k f(s_k)$ et $V'_n = \sum_0^n u_k f(s_{k-1})$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $(V_n - V'_n)$ a une limite finie, on en déduit $V_n \sim V'_n$.

c) D'après I. – 2° *b)*, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-xf(x)}{\alpha+1}$. Les inégalités (2) et (3) impliquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n f(s_n) \leqslant \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)\,dt \leqslant u_n f(s_{n-1}) \leqslant u_n f(s_n) + M[f(s_{n-1}) - f(s_n)],$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant n+1$,

$$\sum_{n+1}^{p} u_k f(s_k) \leqslant \int_{s_n}^{s_p} f(t)\,dt \leqslant \sum_{n+1}^{p} u_k f(s_{k-1}) \leqslant \sum_{n+1}^{p} u_k f(s_k) + M[f(s_n) - f(s_p)].$$

La fonction positive décroissante f a une limite $l \in \mathbb{R}_+$ quand x tend vers $+\infty$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, on a $l = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_k f(s_k) \leqslant \int_{s_n}^{+\infty} f(t)\,dt = R'_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_k f(s_{k-1}) \leqslant R_n + Mf(s_n).$$

On sait que $\displaystyle\int_{s_n}^{+\infty} f(t)\,dt \sim \frac{-s_n f(s_n)}{\alpha+1}$; par suite,

$$Mf(s_n) = o\left(\int_{s_n}^{+\infty} f(t)\,dt\right) \quad \text{et} \quad R_n \sim R'_n \sim \int_{s_n}^{+\infty} f(t)\,dt \sim -\frac{s_n f(s_n)}{\alpha+1}.$$

d) Prenons $u_n = 1$ pour tout n. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n f(s_n) = e^{-(n+1)} \quad \text{et} \quad u_n f(s_{n-1}) = e^{-n}.$$

Les séries V et V′ sont donc convergentes et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R'_n = eR_n = \frac{e^{-n}}{e-1}.$$

R_n et R'_n ne sont donc pas équivalents.

3° *a)* Supposons que la fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x}$ soit croissante sur $[A, +\infty[$, avec $A > 1$. On a successivement, lorsque $A \leqslant x \leqslant y$,

$$\frac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x} \leqslant \frac{\operatorname{Log} f(y)}{\operatorname{Log} y}, \qquad -\operatorname{Log} f(y) \leqslant -\frac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x}\operatorname{Log} y$$

$$\operatorname{Log} f(x) - \operatorname{Log} f(y) \leqslant \frac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x}(\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y).$$

Pour $y > x \geqslant A$, on a $\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y < 0$, $\operatorname{Log} f(x) - \operatorname{Log} f(y) \geqslant 0$ et, par suite, $\operatorname{Log} f(x) \leqslant 0$.

b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ implique $s_{n-1} \geqslant A$. On a, d'après ce qui précède,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \operatorname{Log} f(s_{n-1}) - \operatorname{Log} f(s_n) \leqslant \frac{\operatorname{Log} f(s_{n-1})}{\operatorname{Log} s_{n-1}}(\operatorname{Log} s_{n-1} - \operatorname{Log} s_n) = -\frac{\operatorname{Log} f(s_{n-1})}{\operatorname{Log} s_{n-1}}\operatorname{Log}\frac{s_n}{s_{n-1}}.$$

La suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ étant bornée, il existe $M' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < \frac{s_{n+1}}{s_n} \leqslant M', \qquad \text{d'où} \qquad \forall n \geqslant n_0, \quad \operatorname{Log}\frac{f(s_{n-1})}{f(s_n)} \leqslant -\frac{\operatorname{Log} f(A)}{\operatorname{Log} A}\operatorname{Log} M'.$$

On a donc, en posant $\lambda = -\dfrac{\operatorname{Log} f(A)}{\operatorname{Log} A}\operatorname{Log} M'$,

$$\forall n \geqslant n_0, \quad f(s_{n-1}) \leqslant e^{\lambda} f(s_n)$$

et

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n f(s_n) \leqslant u_n f(s_{n-1}) \leqslant e^{\lambda} u_n f(s_n)$$

ces inégalités prouvent que les séries V et V′ sont de même nature.

c) L'encadrement

$$\forall n \geqslant n_0, \; 0 \leqslant \operatorname{Log}\frac{f(s_{n-1})}{f(s_n)} \leqslant -\frac{\operatorname{Log} f(A)}{\operatorname{Log} A}\operatorname{Log}\frac{s_n}{s_{n-1}}$$

montre que la suite $\left(\operatorname{Log}\dfrac{f(s_{n-1})}{f(s_n)}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, autrement dit $f(s_{n-1}) \sim f(s_n)$.

Les inégalités (2) entraînent donc

$$u_n f(s_n) \sim \int_{s_{n-1}}^{s_n} f(t)\,dt \sim u_n f(s_{n-1}).$$

Lemme. — *Soit (a_n) et (b_n) deux séries à termes réels positifs ou nuls équivalents :*

- *si Σa_n converge, il en est de même de Σb_n et*

$$\sum_{n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{n+1}^{+\infty} b_k;$$

- *si Σa_n diverge, il en est de même de Σb_n et*

$$\sum_0^n a_k \sim \sum_0^n b_k.$$

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'appliquer le lemme du **I.** — **1°** aux fonctions f_1 et g définies par

$$\forall x \in [n, n+1[, \quad f_1(x) = a_n - b_n \quad \text{et} \quad g(x) = b_n.$$

On en déduit

- si V converge, $R_n \sim \displaystyle\int_{s_n}^{+\infty} f(t)\,dt \sim R'_n$;
- si V diverge $\displaystyle\sum_0^n u_k f(s_k) \sim \int_0^{s_n} f(t)\,dt \sim \sum_0^n u_k f(s_{k-1})$.

d) Soit f la fonction continue décroissante positive : $x \mapsto x^{\alpha}$ définie sur $]0, +\infty[$. La fonction : $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x} = \alpha$ est croissante. Les résultats précédents s'appliquent donc

- si $\alpha < -1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^{\alpha} \sim \int_{s_{n-1}}^{+\infty} t^{\alpha}\,dt = -\frac{s_{n-1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sim -\frac{s_n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$;
- si $-1 < \alpha < 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k s_k^{\alpha} \sim \sum_{k=1}^{n} u_k s_k^{\alpha} \sim \int_{s_1}^{s_n} t^{\alpha}\,dt = \frac{s_n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{s_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sim \frac{s_n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

4° *a*) Considérons une série $\Sigma v'_n$ divergente à termes strictement positifs. Définissons la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 f(0) = v'_0 \\ u_n f(s_{n-1}) = v'_n \end{cases} \quad \text{où} \quad s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Comme $0 < v'_n \leqslant f(0)u_n$, la série U est divergente, à termes strictement positifs. D'autre part, la série V′ est divergente par hypothèse.

Si on prend $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ étant convergente, la série V est toujours convergente (d'après **II.** — 1°).

b) Écrivons :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k f(s_k) = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) f(s_k) = \sum_{k=0}^{n} s_k f(s_k) - \sum_{k=0}^{n} s_{k-1} f(s_k)$$
$$= s_n f(s_n) + \sum_{k=0}^{n-1} s_k\big(f(s_k) - f(s_{k+1})\big).$$

La suite de terme général $\sum_{k=0}^{n-1} s_k(f(s_k) - f(s_{k+1}))$ est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{n} u_k f(s_k)$, elle est donc convergente. La suite $(s_n f(s_n))$ est donc convergente; soit l la limite de cette suite. Si l est non nulle, on a

$$f(s_n) \sim \frac{l}{s_n} \quad \text{et} \quad u_n f(s_n) \sim l\,\frac{u_n}{s_n}.$$

Mais la série $\Sigma \frac{u_n}{s_n}$ est divergente, en effet,

$$\sum_{p+1}^{q} \frac{u_n}{s_n} \geqslant \frac{1}{s_q}(s_q - s_p) = 1 - \frac{s_p}{s_q}$$

et, comme $\lim\limits_{q\to+\infty}\left(1 - \frac{s_p}{s_q}\right) = 1$, le critère de Cauchy n'est pas satisfait. On en déduit que V diverge contrairement à l'hypothèse. On a donc $l = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n f(s_n) = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$. Il existe une suite s_n satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} > s_n \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n f(s_n) \leqslant \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

La suite (s_n) tend vers $+\infty$, en effet, étant croissante, cette suite a une limite l dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Si l était finie, on aurait

$$lf(l) = \lim_{n\to+\infty} s_n f(s_n) = 0,$$

ce qui est absurde. D'autre part, la série V converge puisque

$$0 < u_n f(s_n) \leqslant s_n f(s_n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

c) Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{e} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant e \\ f(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log} x} \quad \text{si} \quad x \geqslant e. \end{cases}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

Soit $a > 1$ et $u_n = a^{n^2} - a^{(n-1)^2}$, pour $n \geqslant 1$, $u_0 = 1$. La série U est divergente. On a $u_n \sim a^{n^2}$, d'où

$$u_n f(s_n) \sim \frac{1}{n^2 \operatorname{Log} a}.$$

La série V est convergente.

Très bonne solution de Daniel BELLEBOUCHE.